# הגדרה

סדרה נקראת:

(עולה ממש) מונוטונית עולה אם

(יורדת ממש) מונוטונית יורדת אם

(יורדת) מונוטונית לא עולה אם

(עולה) מונוטונית לא יורדת אם

# משפט

סדרה מונוטונית חסומה מתכנסת. אם אינה חסומה היא מתכנסת במובן הרחב.

# תרגיל

הוכח ש מתכנסת.

## פתרון

נוכיח שהיא מונוטונית. נסתכל על :

*סה"כ הראנו ש לכן לכן הסדרה מונוטונית יורדת*

*וברור ש ולכן היא חסומה ולכן היא מתכנסת:*

# תרגיל

יהיו . נגדיר . נגדיר

הוכח ש ו מתכנסות

## פתרון

*לכן*

*לכן מונוטונית יורדת*

*לכן מונוטונית עולה וסה"כ מתקיים . סה"כ קיבלנו שתי סדרות מונוטוניות וחסומות ולכן הן מתכנסות.*

# תרגיל

מצאו

## פתרון

נכפול ב:

# תרגיל

מצאו את

## פתרון

נוציא שורש nי: לכן לפי משפט הסנדוויץ הגבול הינו 3

# תזכורת

כאשר , , אורך הקטע הוא

# הלמה של קנטור

תהי סדרה של קטעים סגורים המוכלים זה בזה באופן הבא:   
ואורך הקטעים שואף לאפס כלומר

אזי קיימת נקודה יחידה השייכת לכל הקטעים (נקודה זו הינו )

# הגדרה

תהי סדרה ותהי סדרה(סדרת אינדקסים) עולה ממש של מספרים טבעיים אזי תת סדרה של

# הגדרה

L נקרא גבול חלקי של סדרה אם קיימת לה תת סדרה המתכנסת לL

## דוגמה:

1,-1 גבולות חלקיים של . תתי הסדרות הן

# משפט

לכל סדרה חסומה יש תת סדרה מתכנסת, כלומר קיים גבול חלקי. (במילים אחרות לכל סדרה חסומה יש גבול חלקי אחד לפחות).

# משפט

L הוא גבול חלקי של אם לכל ולכל קיים כך ש.  
במילים אחרות לכל סביבה יש אינסוף איברים מהסדרה.

# משפט

תהי סדרה מתכנסת אזי כל תת סדרה של שואפת לL

### מסקנה טריוויאלית

אם אזי L הוא הגבול החלקי היחיד שלה.

# תרגיל

מצא את כל הגבולות החלקיים של הסדרה

## פתרון

נסתכל על תתי הסדרות :

לכן גבולות חלקיים.

נניח בשלילה שקיים גבול חלקי . לכן חםע ההגדרה קעענצ צצ סדרה בהכרח ב יש אינסוף איברים זוגיים או אינסוף אי זוגיים.

נניח בהגבלת הכלליות(ה.כ.) שקיימים אינסוף זוגיים ב ונסמן את תת הסדרה שמכילה אותם ב. בפרט, זו תת סדרה של ששואפת ל5. לכן בסתירה לכך ש

# דוגמה

סדרה עם אינסוף גבולות

# משפט

*הוא הגבול החלקי הגדול ביותר של*

*הוא הגבול החלקי הקטן ביותר של*

# הגדרה

תהי סדרה . נגדיר ,

## הערה

אם אזי לכן מונוטונית יורדת, לכן  
  *כלומר . אותו דבר עבור (רק שהיא מונוטונית עולה)*

# דוגמה

# משפט

# תרגיל

יהיו שתי סדרות כך ש. הוכח/הפרך:

## פתרון

א. הוא הגבול החלקי הגדול ביותר של לכן קיימת תת סדרה . נסתכל על , הינו הגבול החלקי הגדול ביותר של לכן קיימת ,   
לפי הנתון ולכן

ב. נפריך .

ג. הערה:

צ"ל

לפי הנתון ולכן זה נכון לפי סעיף א'.